Asymptotic behaviour of the resolvent and enclosure method for the heat equations in bounded domains with a cavity (Regularity and Singularity for Geometric Partial Differential Equations and Conservation Laws)

AUTHOR(S):

池畠, 優; 川下, 美潮

数理解析研究所講究録
第 1845 巻 2013 年 59-83

Asymptotic behaviour of the resolvent and enclosure method for the heat equations in bounded domains with a cavity

群馬大学・大学院工学研究科　池畠　優 (Masaru Ikehata)
Graduate School of Engineering
Gunma University

広島大学・大学院理学研究科　川下　美潮 (Mishio Kawashita)
Graduate School of Sciences
Hiroshima University

1　序

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ は有界領域、$D\subset\Omega$ は開集合で $\overline{D}\subset\Omega$, $\Omega\setminus\overline{D}$ は連結であるとする。さらにある $0<\alpha_0\leq 1$ に対して $\partial\Omega$, ∂D は C^{2,α_0} 級（C^2 級かつ任意の 2 階偏導関数は α_0 次 Hörder 連続）であるとする。$x\in\partial D$, $y\in\partial\Omega$ における D, Ω に対する単位外向き法線ベクトルを $\nu_x={}^t((\nu_x)_1,(\nu_x)_2,(\nu_x)_3)$, $\nu_y={}^t((\nu_y)_1,(\nu_y)_2,(\nu_y)_3)$ と表す。$T>0$ に対して

$$\begin{cases}(\partial_t-\triangle)u(t,x)=0 & \text{in } (0,T)\times(\Omega\setminus\overline{D}),\\ \partial_\nu u(t,x)=0 & \text{on } (0,T)\times\partial D,\\ u(0,x)=0 & \text{on } \Omega\setminus\overline{D}\end{cases}\tag{1.1}$$

をみたす関数 $u(t,x)$ を考える。ただし、$\partial_\nu=\partial_{\nu_x}=\sum_{j=1}^3(\nu_x)_j\partial_{x_j}$ $(x\in\partial D\cup\partial\Omega)$ である。

(1.1) は熱伝導体 $\Omega\setminus\overline{D}$ を伝わる熱伝導のモデルである。$u(t,x)$ は時刻 t における位置 x での温度分布を表す。D は Ω の中にある空洞、すなわち、熱がほとんど伝わらない場所を表している。境界 $\partial\Omega$ は熱伝導体 $\Omega\setminus\overline{D}$ の外部の境界であり、これは実際に形状を確認できる、すなわち既知のものである。一方空洞 D の境界 ∂D は外部 $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ から見ることはできない。外部の境界 $\partial\Omega$ 上に熱流 $f(t,x)=\partial_\nu u(t,x)$ $((t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega)$ を与え、この熱流に対する境界 $\partial\Omega$ における温度分布 $u(t,x)|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ を計測する。但し、$T>0$ は観測時間である。$X\subset L^2((0,T)\times\partial\Omega)$ を観測のために与える熱流 $f(t,x)$ の集合とする。$f\in X$ に対して温度分布 u を観測することにより次の観測データの集合が得られる。

$$\mathcal{E}_X=\{(u|_{(0,T)\times\partial\Omega},\partial_\nu u|_{(0,T)\times\partial\Omega})\mid u\text{ は (1.1) と }\partial_\nu u|_{(0,T)\times\partial\Omega}=f\in X\text{ を満たす。}\}.\tag{1.2}$$

本稿では次の境界値逆問題を考える。

「時間間隔 $(0,T)$ の間、境界 $\partial\Omega$ における熱流 $\partial_\nu u = f \in X$ を与え、それに対応する温度分布 u を観測する。このようにして得た観測データを $\mathcal{E}_X$ とする。D が未知であるとするとき、この観測データの集合 $\mathcal{E}_X$ を用いて D がある場所、およびその形状を求めることができるか。」

この問題は既知の境界における観測結果から内部の様子を知るという形の逆問題の一種で、境界値逆問題と呼ばれている。境界値逆問題は昭和５５年に Calderón によって導体表面における電圧と電流分布から導体内部（電気伝導率や空洞などについて）の様子を知るという問題を数学の問題として捉えることが提唱されたことを端に発し、その後盛んに研究され、多くのことが明らかにされてきた (例えば [20], [22, 23], [25], [14], [27], [21]) 参照)。

境界値逆問題における大きな考察対象は主に次の３つに分けられる。

1) 一意性　　2) 安定性　　3) 再構成

1) は逆問題における未知量が観測データから一意に定まるかどうかを調べるもので、2) は 1) の下で定まる写像が安定かどうかを調べるものである。これらについては与えられた微分方程式を Cauchy 問題とみたときの解の一意性、またそれを示すための基本的な評価式である Carleman 型評価式と密接な関係があり、多くの研究がある。

(1.1) は媒質 Ω の中に空洞があるという場合を考えている。空洞以外にも介在物（inclusion）と呼ばれるものも境界値逆問題の考察対象であり、盛んに研究されている。介在物とは、熱伝導現象を例に取れば、媒質 Ω の中の一部 D における熱伝導係数が D の外部 $\Omega\setminus\overline{D}$ とは異なっているような媒質のことである。本稿では主に空洞についての境界値逆問題について考えることにする。

1) の一意性については無限回観測、すなわち、無限回の観測を許す (i.e. $\sharp X=\infty$) のときは Elayyan-Isakov [6] による仕事がある。[6] の一意性定理から D の形まで一意的に決めることができることもわかる。このように原理的には無限回観測を許せば、D を求めることができる。しかし、[6] に従えば ∂D の一つの点を決めるためにも無限個の観測データ $\mathcal{E}_X$ が必要になることに注意しよう。また、一回観測 (i.e. $\sharp X=1$) のときは Bryan-Caudill [1] が一意性定理を示している。(1.1) において、初期条件 $u(0,x)=u_0(x)$ における初期データ u_0 は $u_0=0$ となっているが、これは定数でも構わない。しかし、Bryan-Caudill [1] の例にあるように u_0 を任意の関数にすることは出来ないことに注意しよう。他のさまざまな一意性についての結果の概観については [21] を参照するとよいであろう。

2) の安定性については Canuto-Rosset-Vessella [2] や Vessella [29] の仕事がある。さらに Vessella による概観論文 [30] やその参考文献にも関連した仕事が引用されているが、ここではこれ以上は述べないことにする。

3) の再構成の目標は例えば ∂D などのような逆問題における未知量を観測データ $\mathcal{E}_X$ から求める手順を与えることであり、いろいろな方法が提唱されている。その中に [9] において池畠優により提案された囲い込み法 (enclosure method) と呼ばれるものがある。他の再構成の方法と同様、囲い込み法も最初は主に楕円型方程式で法則が記述される境界値逆問題に対して考察されてきた。当初の手順では無限回の観測が必要であったが、その後、[8] で一回のみ観測を行うことにより得たデータから内部情報の一部を取り出せる方法が提示された。その後一回の観測のみから何が分かるかについて主に楕円型方程式のときに考察されてきた（[11] およびその参考文献参照)。また、介在物

に対する囲い込み法も導入されていることに注意しよう (池畠 [9] および [10] 参照)。

囲い込み法は熱方程式の境界値逆問題に対しても有効であることが期待される。1 次元の場合、すなわち、Ω, D と ∂D がそれぞれ $(0, \infty)$, (a, ∞) と $\{a\}$ となるときは、池畠 [13] によって考察され、一回の観測 (i.e. $\sharp X = 1$) から内部にある空洞の境界 $\{a\}$ の位置を決める公式が導出された。介在物に対する 1 次元の熱方程式について Daido-Kang-Nakamura [3] と Daido-Lei-Liu-Nakamura [4] は介在物について池畠 [7] が与えた探針法 (probe method) の考え方を熱方程式の場合に応用することにより境界 $\{a\}$ を決定し、その数値解析例を与えている。探針法は、無限回の観測が必然的に要求されるので、[3, 4] においても、無限回観測 (i.e. $\sharp X = \infty$) が必要になることに注意しよう。

多次元空間における熱方程式に対して囲い込み法がどれくらい有効であるかについて考えることは興味ある問題である。3 次元の場合、池畠ー川下 [16] によって空洞の場合に囲い込み法が有効であることが確かめられた。介在物についても囲い込み法で介在物が存在する領域 D の情報を引き出せることが池畠ー川下 [17] により示されている。さらに空洞の場合には池畠ー川下 [18] より一回観測に対する別の視点からの考察も行われている。本稿では [16, 17, 18] を元にして 3 次元熱方程式に対する囲い込み法についての概要を解説する。

観測データから内部の情報を得るためにはそれらの間をつなぐものが必要になる。囲い込み法では指示関数 (indicator function) と呼ばれる大きなパラメータ λ を含む関数 $I(\lambda)$ がその役割を果たす。一般には、指示関数 $I(\lambda)$ の $\lambda \to \infty$ としたときの漸近挙動を調べることにより D の情報を与えることができる。

[16, 17, 18] では、様々な指示関数が導入されているが、それらはすべて熱流 $f \in X$ に対する (1.1) の解 $u = u_f$ と大きなパラメータ λ を含む空洞 D に独立な関数 $\psi_\lambda(t, x)$ により

$$I(u_f, \psi_\lambda) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \big(\partial_\nu \psi_\lambda(t,x) u_f(t,x) - \psi_\lambda(t,x)\partial_\nu u_f(t,x)\big) dS_x dt \tag{1.3}$$

の形で与えられる。逆問題の観測データ (1.2) より $(0, T) \times \partial\Omega$ 上における $u_f(t, x)$ と $\partial_\nu u(t, x) = f(t, x)$ は既知であること及び ψ_λ は任意に選ぶことができることに注意すれば、(1.3) の $I(u_f, \psi_\lambda)$ は計算可能な量である。

[16] では (1.1) について無限回観測を許す場合の囲い込み法について考察している。一方、[17] では介在物に対する囲い込み法について無限回観測を許す場合に加え、一回観測の場合も考察している。本稿では [16, 17] における熱方程式に対する様々な指示関数を (1.3) の形にまとめることにより、3 次元空間における熱方程式に対する囲い込み法について解説することを目標にする。そのため、本稿の考察対象は (1.1) で記述される空洞の場合に限定することにする。介在物についての詳細は [17] にある。

第 2 節では無限回観測を許す場合と一回観測の場合に (1.3) においてどのように ψ_λ を選び、指示関数を構成するかについて述べる。第 2 節で述べるように (1.3) における ψ_λ は $\psi_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} v(x; \lambda)$ の形で、$v(x; \lambda)$ は少なくとも Ω で $(\Delta - \lambda^2)v(x; \lambda) = 0$ を満たすように選ぶ。こうして得られた指示関数から D の情報を引き出すには $v(x; \lambda)$ について調べなければならない。Theorem 2.1 で D の情報が $v(x; \lambda)$ のどういう情報から分かるのかについて述べる。

Theorem 2.1 で得た $v(x; \lambda)$ に対する十分条件 (2.18) を見れば、(1.3) で定めた指示関数 $I(u_f, \psi_\lambda)$ の $\lambda \to \infty$ のときの挙動は Ω における次の方程式の解 $\phi(x; \lambda)$ の $\lambda \to \infty$ と

したときの挙動と関係があることが分かる。

$$\begin{cases} (\triangle - \lambda^2)\phi(x;\lambda) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \phi(x;\lambda) = 1 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

(1.4) の解 $\phi(x;\lambda)$ については Varadhan [28] により次が示されている。

Varadhan (1967) $x \in \Omega$ とすると $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{-1}{\lambda} \log\phi(x;\lambda) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ が成り立つ。この収束は Ω 上で広義一様である。

Varadhan [28] では上の漸近挙動の結果を用いて熱方程式の基本解に対する $t \to +0$ のときの漸近挙動（短時間漸近挙動）を導いている。以下、本来の用法とは異なるが、本稿では便宜的に (1.4) の解 $\phi(x;\lambda)$ のことを "レゾルベント" と呼ぶことにする。近年では熱方程式の基本解に対する短時間漸近挙動を調べるのはレゾルベントを経由するよりも半群性を用いた方法がよく用いられているようである。これについては例えば Norris [26] やその参考文献を挙げておくに止める。

[16, 17] の考察によりレゾルベントの漸近挙動と指示関数の漸近挙動との関係が明らかにされているが、Theorem 2.1 を通じて考えた方がより明確になる。このことは第 2 節の最後で詳しく述べる。

第 3 節では、$v(x;\lambda)$ を具体的に与えることにより観測データから D のどういう情報が得られるかについて述べる。まず、Theorem 3.1 で無限回観測を許す場合について考える。この場合は観測データの列を必要な情報を得るためにうまく選ぶ（自分で決める）ことができることに注意しよう。これは目的に応じてどういう熱流を与え、観測を行えばよいかということを示唆するものである。Theorem 3.1 では $R_D(y) = \sup_{x\in D}|x-y|$ $(y \in \mathbb{R}^3)$ というこれまでにはない量も得られることが示されている。

次に、Theorem 3.2 で一回観測の場合について述べる。Theorem 2.1 における $v(x;\lambda)$ に対する条件 (2.18) は無限回観測を許す場合と一回観測の場合に共通している。すなわち [17] における一回観測についての考察は、これまで行われていた無限回観測を許す場合に対する指示関数の構成法を整理し、一回観測の場合にも適用したという意味がある。その結果、$\mathrm{dist}(D, \partial\Omega)$ というこれまでには得られていなかった D に対する情報を指示関数から導くことができた (Theorem 3.2 参照)。

第 4 節では Theorem 2.1 を証明する。Theorem 2.1 は本質的には無限回観測を許す場合については [16] で、介在物のときは [17] で考察された内容である。しかし、[16, 17] では Theorem 2.1 の形では述べられてはいないので、本稿ではその証明を行うことにする。

Theorem 3.2 で述べる一回観測では $\mathrm{dist}(D, \partial\Omega)$ が指示関数から導かれるが、第 5 節でその証明の概略について述べる。Theorem 3.1 では $v(x;\lambda)$ は具体的な関数を用いて表されるが、一回観測のときは $v(x;\lambda)$ は具体的な形では与えることができない。そこでポテンシャル論を用いた $v(x;\lambda)$ の表示を用いることにより証明を行う。どちらの場合も最終的には次の積分評価に帰着される。

Proposition 1.1 $\delta > 0$ とし、$B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x-a| < \delta\}$ とする。

(1) $x_0 \in \partial D$ とすると定数 $C > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$\int_{\overline{D}\cap B_\delta(x_0)} e^{-\lambda|x-x_0|}dx \geq C\lambda^{-3} \qquad (\lambda >> 1). \tag{1.5}$$

(2) $y_0 \in \partial\Omega$ とすると定数 $C > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$\int_{\partial\Omega\cap B_\delta(y_0)} e^{-\lambda|y-y_0|}dS_y \geq C\lambda^{-2} \qquad (\lambda >> 1). \tag{1.6}$$

Proposition 1.1 の証明は例えば [17] の Appendix を見よ。このように第 3 節で述べる無限回観測を許す場合と一回観測の場合については証明においても共通点がある。

第 6 節以降では一回観測の場合、指示関数を選ぶ際、これまでの節で述べた $v(x;\lambda)$ の選び方とは異なる選び方をすればどうなるかについて [18] に従って述べる。この別の選び方による指示関数を用いた考察は 1 次元のときは池畠 [13] により行われた。一次元熱方程式に対する囲い込み法の概観は池畠 [12] で与えられている。そこでは、3 次元熱方程式に対する問題提起がなされている。[18] はその中の一つの問題に対する考察である。

第 6 節では [18] で扱われた指示関数の決め方について述べ、第 3 節の一回観測のときの考察との違いや 1 次元のときと 3 次元のときの類似点と相違点について解説する。第 7 節では指示関数の漸近挙動についての詳細について述べ、第 8 節で [18] で与えられた証明の概略を述べる。

2 指示関数の構成とその漸近挙動

まず、$f \in X \subset L^2((0,T)\times\partial\Omega)$ に対する観測データ $(u|_{(0,T)\times\partial\Omega}, \partial_\nu u|_{(0,T)\times\partial\Omega})$ に対する温度分布 $u(T,\cdot)$ の評価から始める。可分な Hilbert 空間 V と H で $V \subset H$ かつ V は H で稠密なものを考える。このとき、埋め込み写像 $H \ni x \to x \in V'$ が存在し、連続となる。特に、$V \subset H \subset V'$ である。$T > 0$ に対して、$W(0,T;V,V') = \{u \,|\, u \in L^2((0,T);V), u' \in L^2((0,T);V')\}$ とおく。ただし、u' は、u の $t \in (0,T)$ における（超関数としての）微分を表す。

関数 $f \in L^2((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))$ に対して、$u \in W(0,T;H^1(\Omega\setminus\overline{D}),(H^1(\Omega\setminus\overline{D}))')$ が任意の $\varphi \in H^1(\Omega\setminus\overline{D})$ に対して

$$\langle u'(t),\varphi\rangle + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} \nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \langle f(t,\cdot),\varphi|_{\partial\Omega}\rangle \text{ in } (0,T), \tag{2.1}$$

を $(0,T)$ 上の超関数の意味で満たすとき u は

$$\begin{cases} (\partial_t - \triangle)u(t,x) = 0 & \text{in } (0,T)\times(\Omega\setminus\overline{D}), \\ \partial_\nu u(t,x) = 0 & \text{on } (0,T)\times\partial D, \\ \partial_\nu u(t,x) = f(t,x) & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

の弱解であるという。[5] の p.473 にある Theorem 1 より埋め込み定理

$$W(0,T;H^1(\Omega\setminus\overline{D}),(H^1(\Omega\setminus\overline{D}))') \hookrightarrow C^0([0,T];L^2(\Omega\setminus\overline{D})),$$

が成り立つ。このことから各 $t\in[0,T]$ に対して $u(t)\in L^2(\Omega\setminus\overline{D})$ を考えることができる。[5] の p.512-513 にある Theorem 1 と 2 より初期条件 $u(0)=0$ を満たす (2.2) の弱解 u が一意的に定まる。[5] の p.512 及び p.520 にある Remark 2 と Theorem 3 より f によらない定数 $C_T>0$ が存在して

$$\|u\|_{L^2((0,T);H^1(\Omega\setminus\overline{D}))}\le C_T\|f\|_{L^2((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))}$$

となる。さらに、u が弱形式 (2.1) を満たすことに注意すれば上の評価より

$$\|u'\|_{L^2((0,T);(H^1(\Omega\setminus\overline{D}))')}\le C_T\|f\|_{L^2((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))}$$

を得る。以上より $f\in X$ なら

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})}\le C_T\|f\|_{L^2((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))}\qquad(0\le t\le T)\tag{2.3}$$

が成り立つことが示された。

以下、(1.3) をどのように決めていくかについて述べる。ここで述べることは [16, 17] で与えられたものと本質的に同じである。[16, 17] でも本稿でも弱解を扱う。弱形式の理論より通常の部分積分から得られる等式を弱形式に見たものが成り立つと考えて議論しても構わないので、[16, 17] では弱形式の形では述べていない。そこで本稿ではできる限り弱形式の形で述べてみることにする。

指示関数 (1.3) において $\psi_\lambda\in C^1([0,T];H^1(\Omega))$ をある $\tilde{\psi}_\lambda\in C([0,T];H^{-1/2}(\partial\Omega))$ に対して

$$\begin{cases}(\partial_t+\triangle)\psi_\lambda(t,x)=0 & \text{in } (0,T)\times\Omega,\\ \partial_\nu\psi_\lambda(t,x)=\tilde{\psi}_\lambda(t,x) & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega,\end{cases}\tag{2.4}$$

を満たすものとして選ぶ。(2.4) は弱解、すなわち

$$\partial_t(\langle\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi\rangle)-\int_\Omega\nabla_x\psi_\lambda(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(x)dx=-\langle\tilde{\psi}_\lambda(t,\cdot),\varphi|_{\partial\Omega}\rangle\quad(\varphi\in H^1(\Omega))\tag{2.5}$$

を満たすことを意味する。また便宜的に $\tilde{\psi}_\lambda$ のことを単に $\partial_\nu\psi_\lambda$ と表す。

ψ_λ は (2.5) を満たすことに注意すれば $\partial_\nu\psi_\lambda\in H^{-1/2}(\partial D)$ が存在して

$$\partial_t(\langle\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi\rangle)-\int_D\nabla_x\psi_\lambda(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(x)dx=-\langle\partial_\nu\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi|_{\partial D}\rangle\ (\varphi\in H^1(D))\tag{2.6}$$

となることが分る[1]。

$\varphi\in H^1(\Omega\setminus\overline{D})$ に対して $\tilde{\varphi}\in H^1(\Omega)$ で $\tilde{\varphi}|_{\Omega\setminus\overline{D}}=\varphi$ となるものを1つ選ぶ。(2.5) における φ を上で選んだ $\tilde{\varphi}$ としたものと (2.6) より

$$\partial_t(\langle\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi\rangle)-\int_{\Omega\setminus\overline{D}}\nabla_x\psi_\lambda(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(x)dx=-\langle\partial_\nu\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi|_{\partial\Omega}\rangle+\langle\partial_\nu\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi|_{\partial D}\rangle\tag{2.7}$$

[1] $\Phi_D(\varphi)=\partial_t(\langle\psi_\lambda(t,\cdot),\varphi\rangle)-\int_D\nabla_x\psi_\lambda(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(x)dx$ とおく。$E:H^{1/2}(\partial D)\to H^1(D)$ を拡張作用素とする。$\Phi_D\in B(H^1(D),\mathbb{C})$ だから $\Phi_D(Ek)=-\langle h,k\rangle_{H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)}$ $(k\in H^{1/2}(\partial D))$ となる $h\in H^{-1/2}(\partial D)$ が存在する。$\varphi\in H^1(D)$ に対して、$k=\varphi|_{\partial D}\in H^{1/2}(\partial D)$ かつ $\tilde{\varphi}=\varphi-Ek$ とおくと $\tilde{\varphi}\in H^1_0(D)\subset H^1_0(\Omega)$ となる。(2.5) より $0=\Phi_\Omega(\tilde{\varphi})=\Phi_D(\tilde{\varphi})=\Phi_D(\varphi)-\Phi_D(Ek)$ となる。よって $\langle h,\varphi|_{\partial D}\rangle_{H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)}=-\Phi_D(\varphi)$ $(\varphi\in H^1(D))$ が成り立つ。この関係式を満たす h と $\tilde{h}$ があったとすると任意の $k\in H^{1/2}(\partial D)$ に対して $\langle h-\tilde{h},k\rangle_{H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)}=\Phi_D(Ek)-\Phi_D(Ek)=0$ となる。よってこの h は一意的に定まる。この h が余法線微分 $\partial_\nu\psi_\lambda\in H^{-1/2}(\partial D)$ である。

となる。上の等式で $\varphi = u_f$ としたものと (2.1) より

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_t \psi_\lambda(t,\cdot), u_f(t,\cdot)\rangle + \langle \partial_t u_f(t,\cdot), \psi_\lambda(t,\cdot)\rangle \\
&\qquad = \langle f(t,\cdot), \psi_\lambda(t,\cdot)|_{\partial\Omega}\rangle - \langle \partial_\nu \psi_\lambda(t,\cdot), u_f(t,\cdot)|_{\partial\Omega}\rangle + \langle \partial_\nu \psi_\lambda(t,\cdot), u_f(t,\cdot)|_{\partial D}\rangle
\end{aligned}
$$

得る。ここで

$$
\langle \partial_t u_f(t,\cdot), \psi_\lambda(t,\cdot)\rangle + \langle u_f(t,\cdot), \partial_t \psi_\lambda(t,\cdot)\rangle = \partial_t\big(\langle u_f(t,\cdot), \psi_\lambda(t,\cdot)\rangle\big)
$$

と $u(0,x)=0$ に注意すれば次を得る。

$$
\begin{aligned}
I(u_f,\psi_\lambda) &= \int_0^T \big\{\langle \partial_\nu \psi_\lambda(t,\cdot), u_f(t,\cdot)|_{\partial\Omega}\rangle - \langle f(t,\cdot), \psi_\lambda(t,\cdot)|_{\partial\Omega}\rangle\big\}dt \\
&= \int_0^T \int_{\partial D} \partial_\nu \psi_\lambda(t,x) u_f(t,x) dS_x dt - \int_{\Omega\setminus\overline{D}} u_f(T,x)\psi_\lambda(T,x)dx. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

以下、上のように双対形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)}$ を境界 $\partial\Omega$ 上の積分の記号で表すことが多い。

ここで $\lambda>0$ に対して $v(\cdot;\lambda)\in H^1(\Omega)$ を

$$
\begin{cases}
(\triangle - \lambda^2)v(x;\lambda) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\
\partial_\nu v(x;\lambda) = g(x;\lambda) & \text{on} \quad \partial\Omega,
\end{cases}
\qquad (2.9)
$$

を弱解の意味で満たすものとして選ぶ。ただし、$g(\cdot;\lambda)\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ は $\lambda>0$ によらない定数 $C>0$ に対して

$$
\|g(\cdot;\lambda)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le Ce^{C\lambda} \quad (\lambda > 1) \qquad (2.10)
$$

となるものとする。この $v(\cdot;\lambda)$ に対して ψ_λ を $\psi_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 t}v(x;\lambda)$ と定めると ψ_λ は (2.4) を満たす。さらに (2.9) と (2.10) に注意して楕円型評価を用いると定数 $C>0$ により

$$
\|v(\cdot;\lambda)\|_{H^1(\Omega)} \le Ce^{C\lambda} \quad (\lambda > 1) \qquad (2.11)
$$

評価される。(2.11) と (2.8) と (2.3) より定数 $C>0$ が存在して

$$
\left| I(u_f,\psi_\lambda) - \int_{\partial D} \partial_\nu v(x;\lambda) \int_0^T e^{-\lambda^2 t} u_f(t,x) dt dS_x \right| \le Ce^{-\lambda^2 T/2} \qquad (\lambda >> 1) \qquad (2.12)
$$

となる。

指示関数は上の (2.12) に着目して、$v(x;\lambda)$ をうまく選ぶことにより作る。無限回観測を許す場合とそうでない場合とで選び方が変わる。

<u>選び方その1</u>　無限回観測を許す場合を考える。この場合は与えるべき熱流の集合 $X\subset L^2((0,T)\times\partial\Omega)$ を都合の良いように選ぶことができることに注意しよう。

$\overline{\Omega}\subset\mathcal{O}$ となるある開集合 $\mathcal{O}$ において

$$
\begin{cases}
q(\cdot;\lambda)\in H^2(\mathcal{O}), \qquad \|q(\cdot;\lambda)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le Ce^{C\lambda} \quad (\lambda > 0) \\
\text{かつ} \ \ (\triangle - \lambda^2)q(x;\lambda) = 0 \ \text{in} \ \mathcal{O} \qquad (\lambda \ge 1)
\end{cases}
\qquad (2.13)
$$

を満たす関数 $q(x;\lambda)$ を任意に選ぶ。この q と任意に選んだ $\varphi \in L^2(0,T)$ に対して

$$f_\lambda(t,x) = \varphi(t)q(x;\lambda)|_{(0,T)\times\partial\Omega} \in L^2((0,T)\times\partial\Omega) \qquad (\lambda \geq 1) \tag{2.14}$$

とおき $X = \{\, f_\lambda \,|\, \lambda \geq 1 \,\}$ と定める。この X に対して観測データ

$$\mathcal{E}_X = \{\, (u_{f_\lambda}|_{(0,T)\times\partial\Omega}, f_\lambda) \,|\, \lambda \geq 1 \,\}$$

を作る。無限回観測を許すとしているので、このような観測データが得られると仮定して良いことになる[2]。この φ と $q(\cdot;\lambda)$ に対して $v(\cdot;\lambda)$ を

$$v(x;\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda^2 t}\varphi(t)q(x;\lambda)dt$$

と定め、この $v(x;\lambda)$ に対して上で述べた手順に従い (1.3) における ψ_λ を $\psi_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 t}v(x;\lambda)$ と定める。そして $I(\lambda)$ を

$$I(\lambda) = I(u_{f_\lambda}, \psi_\lambda) \qquad (\lambda \geq 1) \tag{2.15}$$

で定義する。上で指示関数を $I(\lambda)$ と表すのは記号の濫用ではあるが、誤解は生じないと思うので敢えてこの記号使いをすることにする。

選び方その２　一回観測の場合を考える。この場合は観測データの集合 $\mathcal{E}_X$ はある $f \in L^2((0,T)\times\partial\Omega)$ に対して $X = \{f\}$、すなわち $\mathcal{E}_X = \{(u_f|_{(0,T)\times\partial\Omega}, f)\}$ となっている。この f に対して

$$g(x;\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda^2 t}f(t,x)dt \quad (x \in \partial\Omega, \lambda > 0) \tag{2.16}$$

と定め、$v(x;\lambda)$ を (2.9) の解とする。今、Ω の形は既知なので $v(x;\lambda)$ も f から計算可能であることに注意しよう。この $v(x;\lambda)$ に対して上で述べた手順に従い (1.3) における ψ_λ を $\psi_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 t}v(x;\lambda)$ と定める。そして $I(\lambda)$ を

$$I(\lambda) = I(u_f, \psi_\lambda) \qquad (\lambda \geq 1) \tag{2.17}$$

で定義する。(2.15), (2.17) の指示関数に共通して次が成り立つ。

Theorem 2.1 上に述べた手順で定めた $v(x;\lambda)$ に対して、定数 $d_0 \in \mathbb{R}, C > 0, l_0, l_1 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{cases} C^{-1} \leq e^{-2d_0\lambda}\lambda^{l_0}\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}, & (\lambda \geq 1) \\ e^{-2d_0\lambda}\lambda^{l_1}\left(\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)} + |\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\right) \leq C & (\lambda \geq 1) \end{cases} \tag{2.18}$$

となるとすれば

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{-1}{2\lambda}\log|I(\lambda)| = d_0$$

が成り立つ。

[2]実際には十分大きな $\lambda > 1$ で観測を止めるということになると思うが、理論的に考えて、その「極限」状態を考えることにして話を進める。

「選び方その1」の指示関数 (2.15) における $v(x;\lambda)$ は (2.16) にある f を (2.14) で定めた f_λ に変えて得られた関数 $g(x;\lambda)$ に対して (2.9) を満たす。すなわち、無限回観測を許すときも、一回観測のときも指示関数を定める際に用いる $v(x;\lambda)$ を (2.9) を満たす関数として選んだという点が共通している。

Theorem 2.1 は Varadhan [28] によるレゾルベントの $\lambda\to\infty$ のときの漸近挙動の話との関係がある。ここでは関係について説明するに止めるため形式的な議論のみを行う。そこで (1.4) の解 $\phi(x;\lambda)$ に対する Varadhan [28] の結果が (2.9) の $v(x;\lambda)$ についても成り立っていると類推すると

$$v(x;\lambda)=e^{-\lambda(\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)+o(1))}\qquad(\lambda\to\infty)$$

となることが予想される。ただし $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)=\inf\{|y-x|\,|\,y\in\partial\Omega\}$ である。$\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)=\inf_{x\in D}\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)=\inf\{|y-x|\,|\,y\in\partial\Omega,\,x\in D\}$ と置く。上の式が1階微分についてもなりたっているとすれば

$$\begin{aligned}\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}&=e^{-2\lambda(\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)+o(\lambda^{-1}\log\lambda))}&&(\lambda\to\infty),\\ |\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}&=e^{-2\lambda(\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)+o(\lambda^{-1}\log\lambda))}&&(\lambda\to\infty)\end{aligned}$$

となることが形式的には分かる。この式を認めると Theorem 2.1 の結論である

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{-1}{2\lambda}\log|I(\lambda)|=d_0$$

における d_0 が $d_0=\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)$ となることがわかる。もし $g(x;\lambda)=e^{\lambda d_1}$ ならば上の d_0 は $d_0=\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)+d_1$ となり、d_0 の値が変わる。このように $g(x;\lambda)$ の境界 $\partial\Omega$ における λ についての挙動は重要である。

次の節で定理 2.1 における $v(x;\lambda)$ の選び方について述べ、本節で導入した指示関数から D に関するどういう情報が得られるかについて述べる。

3 指示関数と空洞 D

空洞 D に対する次の量

$$\begin{aligned}&h_D(\omega)=\sup_{x\in D}x\cdot\omega\quad(\omega\in S^2), &&d_D(p)=\inf\{|y-p|\,|\,y\in D\}\quad(p\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}),\\ &R_D(y)=\sup_{x\in D}|x-y|\quad(y\in\mathbb{R}^3), &&\mathrm{dist}\,(D,\partial\Omega)=\inf\{|y-x|\,|\,y\in\partial\Omega,\,x\in D\}\end{aligned}$$

を考えよう。これらの量が分かれば、D の大きさの評価ができる。例えば $h_D(\omega)$ が分かれば D は $x\cdot\omega<h_D(\omega)$ で定まる領域内にあることが分かる。よってすべての $\omega\in S^2$ に対して $h_D(\omega)$ が求まれば D は

$$D\subset\cap_{\omega\in S^2}\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,x\cdot\omega<h_D(\omega)\}$$

を満たすことがわかる。このように D を平面で囲い込むことができる。楕円型方程式に対する逆問題に対して指示関数を適当に導入することにより支持関数 $h_D(\omega)$ を求め

る手順が池畠 [8, 9] により与えられた。これが「囲い込み法」の由来である。他にも $d_D(p)$ や $R_D(y)$ が求まれば同様にして

$$D \subset \cap_{p\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,|x-p|>d_D(p)\},\quad D\subset\cap_{y\in\mathbb{R}^3}\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,|x-y|<R_D(y)\}$$

が分かる。もちろん $\mathrm{dist}\,(D,\partial\Omega)$ からは場所の推定はできないが、D がどれくらい境界から離れているかは分かる。

以上の準備の下、まず無限回観測を許すときから始めよう。

Theorem 3.1 (2.14) における φ を $\varphi\in C^1([0,T])$ かつ $\varphi(0)\neq 0$ を満たすものとする。このとき (2.15) の指示関数 $I(\lambda)$ を定めるために用いた関数 $q(x;\lambda)$ を

(1) $\omega\in S^2$ に対して $q(x;\lambda)=e^{\lambda\omega\cdot x}$ と選ぶと $d_0=h_D(\omega)$,

(2) $p\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ に対して $q(x;\lambda)=E_\lambda(x,p)$ と選ぶと $d_0=d_D(p)$,

(3) $y\in\mathbb{R}^3$ に対して $q(x;\lambda)=\tilde{E}_\lambda(x,y)$ と選ぶと $d_0=R_D(y)$

に対して Theorem 2.1 の (2.18) が成り立つ。ただし、$E_\lambda(x,p)$, $\tilde{E}_\lambda(x,y)$ はそれぞれ

$$E_\lambda(x,p)=\frac{e^{-\lambda|x-p|}}{2\pi|x-p|},\qquad \tilde{E}_\lambda(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{\lambda|x-y|}-e^{-\lambda|x-y|}}{|x-y|} & (x\neq y),\\ 2\sqrt{\lambda} & (x=y)\end{cases}$$

である。

証明 : (2) についての証明の概略を述べる (詳細、および (1), (3) については [16, 17] を参照)。部分積分より

$$\left|\int_0^T e^{-\lambda^2 t}\varphi(t)dt\right|\geq\frac{|\varphi(0)|}{2}\lambda^{-2}\qquad(\lambda>>1)$$

となる。この事実と

$$\nabla_x E_\lambda(x,p)=-\frac{e^{-\lambda|x-p|}}{2\pi|x-p|}\Big(\lambda+\frac{1}{|x-p|}\Big)\frac{x-p}{|x-p|}$$

に注意すれば $v(x;\lambda)$ の定義より定数 $C>0$ が存在して

$$\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\geq C\int_D e^{-2\lambda|x-p|}dx\qquad(\lambda>>1)$$

となる。$d_D(p)=|x_0-p|$ となる $x_0\in\partial D$ を一つ選ぶ。$x\in\partial D$ に対して $|x-p|\leq|x-x_0|+d_D(p)$ となることに注意すれば

$$\int_D e^{-2\lambda|x-p|}dx\geq e^{-2\lambda d_D(p)}\int_D e^{-2\lambda|x-x_0|}dx\geq C\lambda^{-3}e^{-2\lambda d_D(p)}$$

を得る。上で、最後に (1.5) を用いたことに注意しよう。故に (2.18) の下からの評価の部分が $d_0=d_D(p)$ に対して成り立つことが分かる。また $E_\lambda(x,p)$ の定義から

$$\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\leq C\int_D e^{-2\lambda|x-p|}dx\leq C'e^{-2\lambda d_D(p)}$$

となることより (2.18) の上からの評価も分かる。以上より (2) について Theorem 3.1 が成り立つことがわかる。 ■

定理 3.1 の (1)〜(3) のいずれの場合も q は (2.13) を満たしていることに注意しよう。よって定理 2.1 と定理 3.1 より $h_D(\omega)$ や $d_D(p)$ や $R_D(y)$ を (2.15) で定めた指示関数 $I(\lambda)$ から得ることができる。

D が既知の非均質かつ等方的な熱伝導体中に発生した空洞あるいは介在物の場合にもその $h_D(\omega)$ を (2.15) に対応する指示関数を構成することにより得ることができる。ただし $f_\lambda(t,x)$ は複素数値関数になりそれは Sylvester-Uhlmann による複素幾何光学解 ([27]) の類似を構成することにより与えられる。この方向については [15] を参照していただきたい.

次に一回観測の場合について考えよう。このときは次を得る。

Theorem 3.2 (2.17) の指示関数 $I(\lambda)$ を定めるために用いた熱流 f に対して (2.16) で定義された関数 $g(x;\lambda)$ が $g(\cdot;\lambda)\in C(\partial\Omega)$ かつ定数 $C>0$ と $l_2\in\mathbb{R}$ が存在して

$$C^{-1}\le\lambda^{l_2}g(x;\lambda)\le C\quad(x\in\partial\Omega,\lambda>>1)\tag{3.1}$$

を満たすとする。このとき (2.9) の解 $v(x;\lambda)$ は $d_0=\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)$ に対して Theorem 2.1 の (2.18) を満たす。

Theorem 3.2 にある観測データとして与える熱流 f に対する仮定 (3.1) における下からの評価は $t=0$ のときに熱流 f が供給されていることを意味する。例えば $f(t,x)=0$ $(0\le t\le\delta)$ のときは $|g(x;\lambda)|\le Ce^{-\delta\lambda^2}$ となり (3.1) は成り立たない。ちなみに Theorem 3.1 における φ の条件も与えるべき熱流は $t=0$ のときに供給しないといけないということを意味している。この条件も例えば $\varphi\in C^N([0,T])$, $\varphi^{(j)}(0)=0$ $(j=0,1,\ldots,N-1)$, $\varphi^{(N)}(0)\ne0$ などと緩めることができる。

条件 (3.1) のもと、(2.9) より定まる $v(x;\lambda)$ は (2.10) を満たす。これは楕円型評価により

$$\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C\|g(\cdot;\lambda)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\le C'\lambda^{-l_2}\qquad(\lambda>>1)$$

となることに注意すればよい。よってこの一回観測のときも無限回観測を許したときと同様、Theorem 2.1 と Theorem 3.2 より $\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)$ を (2.17) で定めた指示関数 $I(\lambda)$ から得ることができる。

4 Theorem 2.1の証明

この節では定理 2.1 を証明する。[16, 17] では定理 2.1 の形ではまとめていないが、証明方法は [16] の第 2 節、[17] の第 2 節にあるものと同じである。

$$w_f(x;\lambda)=\int_0^T e^{-\lambda^2t}u_f(t,x)dt\tag{4.1}$$

とおく。w_f は

$$\lambda^2 \int_{\Omega\setminus\overline{D}} w_f(x;\lambda)\varphi(x)dx + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} \nabla_x w_f(x;\lambda)\cdot\nabla\varphi(x)dx$$
$$= \langle g(\cdot;\lambda),\, \varphi|_{\partial\Omega}\rangle - \int_{\Omega\setminus\overline{D}} e^{-\lambda^2 T} u_f(T,x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in H^1(\Omega\setminus\overline{D}))$$

すなわち、次の方程式を弱解の意味で満たすことが分かる。

$$\begin{cases} (\triangle-\lambda^2)w_f(x;\lambda) = e^{-\lambda^2 T}u_f(T,x) & \text{in} \quad \Omega\setminus\overline{D}, \\ \partial_\nu w_f(x;\lambda) = g(x;\lambda) & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \partial_\nu w_f(x;\lambda) = 0 & \text{on} \quad \partial D, \end{cases}$$

$p_f(x;\lambda)$ を方程式

$$\begin{cases} (\triangle-\lambda^2)p_f(x;\lambda) = 0 & \text{in} \quad \Omega\setminus\overline{D}, \\ \partial_\nu p_f(x;\lambda) = g(x;\lambda) & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \partial_\nu p_f(x;\lambda) = 0 & \text{on} \quad \partial D, \end{cases} \tag{4.2}$$

の弱解とし、$\epsilon_f(x;\lambda) = w_f(x;\lambda) - p_f(x;\lambda)$ とおく。$\epsilon_f(\cdot;\lambda) \in H^1(\Omega\setminus\overline{D})$ が満たす方程式を弱形式で表すと

$$\lambda^2 \int_{\Omega\setminus\overline{D}} \epsilon_f\varphi dx + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} \nabla_x\epsilon_f\cdot\nabla_x\varphi dx = \int_{\Omega\setminus\overline{D}} e^{-\lambda^2 T}u_f(T,x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in H^1(\Omega\setminus\overline{D})) \tag{4.3}$$

となる。第2節における熱流 f の選び方より無限回観測のときは (2.14) より $f = f_\lambda$ で

$$\|f_\lambda\|_{L^2((0,T);L^2(\partial\Omega))} \le Ce^{C\lambda} \qquad (\lambda >> 1)$$

となる。一回観測のときは $\|f\|_{L^2((0,T);L^2(\partial\Omega))}$ は $\lambda > 0$ によらない定数である。(4.3) で $\varphi = \epsilon_f$ として (2.3) を用い、上の事実に注意すると

$$\|\nabla_x\epsilon_f(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})} + |\lambda|^2\|\epsilon_f(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})} \le Ce^{-3\lambda^2 T/4} \qquad (\lambda >> 1) \tag{4.4}$$

を得る。また (2.7) を得るのと同様にして任意の $\varphi \in H^1(\Omega\setminus\overline{D})$ に対して

$$\lambda^2 \int_{\Omega\setminus\overline{D}} v\varphi dx + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} \nabla_x v\cdot\nabla_x\varphi dx = \langle g(\cdot;\lambda),\, \varphi|_{\partial\Omega}\rangle - \int_{\partial D} \partial_\nu v(x;\lambda)\varphi dS_x \tag{4.5}$$

を得る。(4.5) で $\varphi = \epsilon_f$ とし、(4.3) で $\varphi = v$ とすることにより

$$\int_{\Omega\setminus\overline{D}} e^{-\lambda^2 T}u_f(T,x)v(x;\lambda)dx = \langle g(\cdot;\lambda),\, \epsilon_f(\cdot;\lambda)|_{\partial\Omega}\rangle - \int_{\partial D} \partial_\nu v(x;\lambda)\epsilon_f(x;\lambda)dS_x$$

となる。この等式と (2.11)、(2.3)、(2.10) と (4.4) より

$$\left|\int_{\partial D} \partial_\nu v(x;\lambda)\epsilon_f(x;\lambda)dS_x\right| \le Ce^{-\lambda^2 T/2} \qquad (\lambda >> 1)$$

を得る。この評価と (2.12) と (4.1) より定数 $C>0$ が存在して

$$\left|I(\lambda)-\int_{\partial D}\partial_\nu v(x;\lambda)p_f(x;\lambda)dS_x\right|\le Ce^{-\lambda^2T/2}\quad(\lambda>>1)\tag{4.6}$$

となる。

次に $R(x;\lambda)=v(x;\lambda)-p_f(x;\lambda)$ とおく。弱解の定義より

$$\lambda^2\int_{\Omega\setminus\overline{D}}p_f\varphi dx+\int_{\Omega\setminus\overline{D}}\nabla_x p_f\cdot\nabla_x\varphi dx=\langle g(\cdot;\lambda),\,\varphi|_{\partial\Omega}\rangle\qquad(\varphi\in H^1(\Omega\setminus\overline{D}))$$

を満たしているので、(4.3) より $R(\cdot;\lambda)\in H^1(\Omega\setminus\overline{D})$ は次を満たす。

$$\lambda^2\int_{\Omega\setminus\overline{D}}R\varphi dx+\int_{\Omega\setminus\overline{D}}\nabla_x R\cdot\nabla_x\varphi dx=-\int_{\partial D}\partial_\nu v(\cdot;\lambda)\varphi dS_x\quad(\varphi\in H^1(\Omega\setminus\overline{D}))$$

上で $\varphi=R$ とすることにより、

$$-\int_{\partial D}\partial_\nu vRdS_x\ge 0,\qquad \|\nabla_x R\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})}+|\lambda|\|R\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{D})}\le C\|\partial_\nu v\|_{H^{-1/2}(\partial D)}\quad(\lambda>>1)$$

となる。この事実より $\lambda>>1$ のとき

$$\int_{\partial D}\partial_\nu v v dS_x\le\int_{\partial D}\partial_\nu v p_f dS_x\le\int_{\partial D}\partial_\nu v v dS_x+C\|\partial_\nu v\|^2_{H^{-1/2}(\partial D)}\tag{4.7}$$

となる。余法線微分 $\partial_\nu v$ の定義から任意の $\varphi\in H^1(D)$ に対して

$$\left|\langle\partial_\nu v,\varphi|_{\partial D}\rangle_{H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)}\right|\le\left(\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{H^1(D)}$$

となることに注意すれば

$$\|\partial_\nu v(\cdot;\lambda)\|_{H^{-1/2}(\partial D)}\le C\left(\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\right)^{1/2}\tag{4.8}$$

となる。また、v は (2.9) の弱解だから

$$\int_{\partial D}\partial_\nu v v dS_x=\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}$$

となる。上の等式と (4.6) と (4.7) と (4.8) より定数 $C>0$ が存在して

$$\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}-Ce^{-\lambda^2T/2}\le I(\lambda)\quad(\lambda>>1),$$
$$I(\lambda)\le\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+Ce^{-\lambda^2T/2}\quad(\lambda>>1)$$

を得る。上の評価と (2.18) より定数 $C_1>C_0>0$ が存在して

$$C_0\lambda^{-l_0}\le e^{2d_0\lambda}I(\lambda)\le C_1\lambda^{-l_1}\qquad(\lambda>>1)$$

となる。この評価より

$$\frac{-l_0\log\lambda+\log C_0}{\lambda}\le 2d_0+\lambda^{-1}\log|I(\lambda)|\le\frac{-l_1\log\lambda+\log C_1}{\lambda}\qquad(\lambda>>1)$$

となるので $\lambda\to\infty$ とすれば Theorem 2.1 が成り立つことが分る。 ■

5 Theorem 3.2の証明の概略

この節では Theorem 3.2 の証明の概略について述べる。(2.9) の解 $v(x;\lambda)$ をポテンシャルを用いて表示することにより証明する。Theorem 2.1 における $E_\lambda(x,p)$ に対して

$$V_\Omega(\lambda)g(x)=\int_{\partial\Omega}E(x-y;\lambda)g(y)dS_y$$

とおく（一重層ポテンシャル）。$E_\lambda(x,p)$ は $(\triangle-\lambda^2)E(x;\lambda)=-2\delta(x-p)$ をみたすことに注意しよう。ポテンシャル論において次はよく知られている（例えば [24] 参照)。

1) $(\triangle-\lambda^2)V_\Omega(\lambda)g(x)=0 \quad \text{in } \Omega,$

2) $V_\Omega(\lambda)\in B(C(\partial\Omega),C^\infty(\Omega)\cap C(\mathbb{R}^3))$ であり、

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}V_\Omega(\lambda)g\Big|_{\partial\Omega}(x)=\lim_{h\to+0}\sum_{j=1}^{3}(\nu_x)_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}V_\Omega(\lambda)g\Big)(x-h\nu_x) \qquad (x\in\partial\Omega)$$

とおくと

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}V_\Omega(\lambda)g\Big|_{\partial\Omega}(x)=g(x)+S_{\partial\Omega}(\lambda)g(x) \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (g\in C(\partial\Omega))$$

となる。ただし $S_{\partial\Omega}(\lambda)g(x)=\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu_x}E(x-y;\lambda)g(y)dS_y \quad \text{on } \partial\Omega$ である。

3) $\lambda>0$ のとき $S_{\partial\Omega}(\lambda)$ は $C(\partial\Omega)$ 上の有界線形作用素である。さらに定数 $C>0$ が存在して $\|S_{\partial\Omega}(\lambda)\|_{B(C(\partial\Omega))}\le C\lambda^{-1}$ $(\lambda\ge1)$ となる。

以下、(2.9) の解 $v(x;\lambda)$ を

$$v(x;\lambda)=V_\Omega(\lambda)\psi(x;\lambda) \tag{5.1}$$

の形で解を求める。1) より $(\triangle-\lambda^2)v(x;\lambda)=0$ in Ω である。境界条件は次で与えられる。

$$g(x;\lambda)=\partial_{\nu_x}v(x;\lambda)\Big|_{\partial\Omega}=\psi(x;\lambda)+S_{\partial\Omega}(\lambda)\psi(x;\lambda) \qquad \text{on } \partial\Omega$$

である。よって (2.9) の境界条件は次の ψ に関する方程式と同値になる。

$$\psi(x;\lambda)+S_{\partial\Omega}(\lambda)\psi(x;\lambda)=g(x;\lambda) \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{5.2}$$

3) より $\lambda>>1$ のときは $(I+S_{\partial\Omega}(\lambda))^{-1}=I+\sum_{n=1}^{\infty}(-S_{\partial\Omega}(\lambda))^n$ は $B(C(\partial\Omega))$ において収束し、定数 $C>0$ と $\mu_0>0$ が存在して

$$\|(I+S_{\partial\Omega}(\lambda))^{-1}-I\|_{B(C(\partial\Omega))}\le C\lambda^{-1} \qquad (\lambda\ge\mu_0)$$

となる。よって (5.2) は $\lambda\ge\mu_0$ のときに $C(\partial\Omega)$ 内で可解であり $\psi(\cdot;\lambda)\in C(\partial\Omega)$ となる。さらに $g(x;\lambda)$ に対する仮定 (3.1) により定数 $C>0$ が存在して

$$|\psi(x;\lambda)-g(x;\lambda)|\le C\lambda^{-1-l_2} \qquad (x\in\partial\Omega,\lambda\ge\mu_0) \tag{5.3}$$

となる。

$J(\lambda)=\lambda^{2l_2}\int_D |\nabla_x v(x;\lambda)|^2 dx$ とおく。解 $v(x;\lambda)$ の表示 (5.1) を用いて $J(\lambda)$ の積分表示し、その評価を行う。(5.1) より

$$\nabla_x v(x;\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\psi(y;\lambda)\frac{e^{-\lambda|x-y|}}{|x-y|}\left(-\lambda-\frac{1}{|x-y|}\right)\frac{x-y}{|x-y|}dS_y$$

である。よって

$$\begin{aligned}\lambda^{2l_2}|\nabla_x v(x;\lambda)|^2 &= \frac{\lambda^{2l_2}}{(2\pi)^2}\int_{\partial\Omega}dS_y\int_{\partial\Omega}dS_{y'}\psi(y;\lambda)\frac{e^{-\lambda|x-y|}}{|x-y|}\left(-\lambda-\frac{1}{|x-y|}\right)\frac{x-y}{|x-y|}\\ &\qquad\cdot\psi(y';\lambda)\frac{e^{-\lambda|x-y'|}}{|x-y'|}\left(-\lambda-\frac{1}{|x-y'|}\right)\frac{x-y'}{|x-y'|}\\ &=\int_{\partial\Omega}dS_y\int_{\partial\Omega}dS_{y'}e^{-\lambda|x-y|}e^{-\lambda|x-y'|}\Phi(x,y,y';\lambda)\qquad(\lambda\ge\mu_0)\end{aligned}$$

となる。ただし

$$\Phi(x,y,y';\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\psi_1(y;\lambda)\psi_1(y';\lambda)}{|x-y||x-y'|}\left(\lambda+\frac{1}{|x-y|}\right)\left(\lambda+\frac{1}{|x-y'|}\right)\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\frac{x-y'}{|x-y'|}$$

かつ $\psi_1(y;\lambda)=\lambda^{l_2}\psi(y;\lambda)$ である。以上より

$$J(\lambda)=\int_{\partial\Omega}dS_y\int_{\partial\Omega}dS_{y'}\int_D dx e^{-\lambda|x-y|}e^{-\lambda|x-y'|}\Phi(x,y,y';\lambda)\qquad(\lambda\ge\mu_0)\tag{5.4}$$

を得る。$d_0=\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)$ とおく。

$$\begin{aligned}&e^{-\lambda|x-y|}\le e^{-\lambda d_0} && (x\in D, y\in\partial\Omega, \lambda\ge\mu_0)\\ &|\Phi(x,y,y';\lambda)|\le C\lambda^2 && (x,x'\in D, y,y'\in\partial\Omega,\lambda\ge\mu_0)\end{aligned}\tag{5.5}$$

に注意すれば (5.4) と (5.1) と $g(x;\lambda)$ に対する仮定 (3.1) 及び (5.3) より定数 $C>0$ が存在して

$$\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}+|\lambda|^2\|v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)}\le Ce^{-2\lambda d_0}\lambda^{2-2l_2}\qquad(\lambda\ge\mu_0)$$

となることが分る。このように (2.18) における上からの評価はすぐに分る。

(2.18) の下からの評価について考えよう。$\mathcal{M}=\{(x,y)\in\partial D\times\partial\Omega\,|\,|x-y|=d_0\}$ とおく。(5.4) を見れば $J(\lambda)$ の主要な部分は $\widetilde{\mathcal{M}}=\{(x,y,y')\in\overline{D}\times\partial\Omega\times\partial\Omega\,|\,|x-y|+|x-y'|=2d_0\}$ から来ることが予想される。$(x,y,y')\in\widetilde{\mathcal{M}}$ のとき $|x-y|=|x-y'|=d_0$, すなわち、$(x,y),(x,y')\in\mathcal{M}$ となる。このとき後述の Lemma 5.3 の 2) より $y=x+d_0\nu_x$, $y'=x+d_0\nu_x$, すなわち $y=y'$ となる。よって $\widetilde{\mathcal{M}}=\{(x,y,y)\in\overline{D}\times\partial\Omega\times\partial\Omega\,|\,|x-y|=d_0\}$ である。この事実に注意して (5.4) における積分を $\widetilde{\mathcal{M}}$ の近傍とそうでない部分に分ける。仮定 (3.1) より $\Phi(x,y,y';\lambda)$ の $(|x-y||x-y'|)^{-1}(x-y)\cdot(x-y')$ 以外の項は正である。$(x,y,y')\in\widetilde{\mathcal{M}}$ のときはこの項も正となる。この事実に注意すれば $J(\lambda)$ を下から評価できる。

以下、$B_R(z) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x-z| < R\}$ とする。$\delta > 0$ に対して

$$\mathcal{W}_\delta = \cup_{(x_0,y_0)\in\mathcal{M}}(\overline{D}\cap B_\delta(x_0)) \times (\partial\Omega \cap B_\delta(y_0)) \times (\partial\Omega \cap B_\delta(y_0))$$

とおく。定義から $\mathcal{W}_\delta \subset \overline{D}\times\partial\Omega\times\partial\Omega$ は開集合で $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{W}_\delta$ となる。

Lemma 5.1 任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して定数 $\delta_1 > \delta_2 > 0$ が存在し、次がなりたつ。

$$\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\frac{x-y'}{|x-y'|} \geq 1-\varepsilon_1, \quad |x-y| \leq d_0+\varepsilon_1, \quad |x-y'| \leq d_0+\varepsilon_1 \quad ((x,y,y') \in \mathcal{W}_{\delta_1}),$$
$$|x-y|+|x-y'| \geq 2d_0+\delta_2 \qquad ((x,y,y') \in \overline{D}\times\partial\Omega\times\partial\Omega\setminus\mathcal{W}_{\delta_1}).$$

Lemma 5.1 は [17] の Appendix で示されている。

Lemma 5.1 において例えば $\varepsilon_1 = 1/2$ とする。このとき Lemma 5.1 と仮定 (3.1) より定数 $C > 0$ と $\mu_0 > 0$ が存在して、

$$\Phi(x,y,y';\lambda) \geq C\lambda^2 \qquad ((x,y,y') \in \mathcal{W}_{\delta_1}, \lambda \geq \mu_0)$$

となる。この評価と (5.5) と Lemma 5.1 より定数 $C_1 > 0$ と $C' > 0$ が存在して

$$J(\lambda) \geq 2C_1\lambda^2 \int_{\mathcal{W}_{\delta_1}} e^{-\lambda(|x-y|+|x-y'|)} dS_y dS_{y'} dx - C'\lambda^2 e^{-\lambda(2d_0+\delta_2)} \qquad (\lambda \geq \mu_0)$$

となる。ここで $(x_0,y_0) \in \mathcal{M}$ を一つ選ぶ。

$$|x-y|+|x-y'| \leq 2|x-x_0| + 2d_0 + |y_0-y| + |y_0-y'|$$

と $\mathcal{W}_{\delta_1} \supset (\overline{D}\cap B_{\delta_1}(x_0)) \times (\partial\Omega\cap B_{\delta_1}(y_0)) \times (\partial\Omega\cap B_{\delta_1}(y_0))$ に注意すれば

$$\begin{aligned} J(\lambda) &\geq 2C_1\lambda^2 e^{-2\lambda d_0} \int_{\overline{D}\cap B_{\delta_1}(x_0)} e^{-\lambda|x-x_0|}dx \Big(\int_{\partial\Omega\cap B_{\delta_1}(y_0)} e^{-\lambda|y-y_0|}dS_y\Big)^2 \\ &\qquad - C'\lambda^2 e^{-\lambda(2d_0+\delta_2)} \\ &\geq 2C_1\lambda^{-5}e^{-2\lambda d_0} - C'\lambda^2 e^{-\lambda(2d_0+\delta_2)} \end{aligned}$$

となる。上で最後に Proposition 1.1 の (1.5) と (1.6) を用いたことに注意しよう。よって必要ならば定数 $\mu_0 > 0$ をより大きくすれば

$$J(\lambda) \geq C_1\lambda^{-5}e^{-2\lambda d_0} \qquad (\lambda \geq \mu_0)$$

を得る。故に $\|\nabla_x v(\cdot;\lambda)\|^2_{L^2(D)} \geq C_1\lambda^{-5-l_2}e^{-2\lambda d_0}$ $(\lambda \geq \mu_0)$ となり、(2.18) の下からの評価も示された。 ■

Remark 5.2 Theorem 3.2 における仮定 (3.1) は次のように少し弱めることができる。

$g(\cdot;\lambda) \in C(\partial\Omega)$ かつ定数 $C > 0$ と $l_2 \in \mathbb{R}$ が存在して次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $|\lambda^{l_2}g(y;\lambda)| \leq C$ $(y \in \partial\Omega, \lambda >> 1)$,

(2) ある点 $(x_0,y_0) \in \mathcal{M}$ と定数 $\delta > 0$ が存在して $\lambda^{l_2}g(y;\lambda) \geq C^{-1}$ $(y \in \partial\Omega, |y-y_0| < \delta, \lambda >> 1)$ となる。

以下、Remark 5.2の主張を示そう。(2.18)の下からの評価を示すことが問題である。まず次の補題を準備しよう。

Lemma 5.3 1) $\mathcal{M} = \{ (x,y) \in \overline{D} \times \partial\Omega \,|\, |x-y| = d_0 \}$ となる。

2) $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ とすると $\nu_{x_0} = \nu_{y_0}$ かつ $y_0 = x_0 + d_0\nu_{x_0}$ となる。ただし ν_{x_0}, ν_{y_0} はそれぞれ $x_0 \in \partial D$, $y_0 \in \partial\Omega$ における ∂D, $\partial\Omega$ の単位外向き法線ベクトルである。

3) 任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ と任意の $\delta > 0$ に対して $\delta > \delta' > 0$ を満たす δ' が存在して $(x,y) \in \partial D \times \partial\Omega$ が $|y-y_0| \geq \delta$ かつ $|x-x_0| \leq \delta'$ を満たせば $(x,y) \notin \mathcal{M}$ である。

3)' 任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ と任意の $\delta > 0$ に対して $\delta > \delta' > 0$ を満たす δ' が存在して $(x,y) \in \partial D \times \partial\Omega$ が $|y-y_0| \leq \delta'$ かつ $|x-x_0| \geq \delta$ を満たせば $(x,y) \notin \mathcal{M}$ である。

証明：1) は明らかである。2) を示す。$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ とする。$x_0 \in \partial D$ の近傍における ∂D の局所近傍系 $x = s(\sigma)$ $(\sigma = (\sigma_1, \sigma_2))$ と $y_0 \in \partial\Omega$ の近傍における $\partial\Omega$ の局所近傍系 $y = \tilde{s}(\tilde{\sigma})$ $(\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2))$ をえらぶ。ここで $x_0 = s(0)$, $y_0 = \tilde{s}(0)$ と選んでも良い。$d_0 = |x_0 - y_0|$ だから $(\sigma, \tilde{\sigma}) \mapsto |s(\sigma) - \tilde{s}(\tilde{\sigma})|$ は $(\sigma, \tilde{\sigma}) = (0,0)$ で最小値を取る。故に $\dfrac{\partial}{\partial\sigma_j}|s(\sigma) - \tilde{s}(\tilde{\sigma})|\Big|_{\sigma=0,\tilde{\sigma}=0} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial\tilde{\sigma}_j}|s(\sigma) - \tilde{s}(\tilde{\sigma})|\Big|_{\sigma=0,\tilde{\sigma}=0} = 0$ となる。すなわち次を得る。

$$\frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} \cdot \frac{\partial s}{\partial\sigma_j}(0) = 0, \qquad \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} \cdot \frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{\sigma}_j}(0) = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

これは $(x_0 - y_0)/|x_0 - y_0|$ が ν_{x_0} と ν_{y_0} に平行であることを意味している。ただし ν_{x_0} と ν_{y_0} はそれぞれ $x_0 \in \partial D$ と $y_0 \in \partial\Omega$ における単位外向き法線ベクトルを表す。それぞれのベクトルの向きと長さを考慮すれば

$$\frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} = \nu_{x_0} = \nu_{y_0}$$

を得る。故に $y_0 = x_0 + |y_0 - x_0|\nu_{x_0} = x_0 + d_0\nu_{x_0}$ となる。

3) を示す。もしそうでないとするとある $\delta > 0$ と $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ が存在して任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して $(x_l, y_l) \in \partial D \times \partial\Omega$ で $|y_l - y_0| \geq \delta$ かつ $|x_l - x_0| \leq 1/l$ を満たしかつ $(x_l, y_l) \in \mathcal{M}$ である。∂D, $\partial\Omega$ はコンパクトだから適当な部分列 $\{l_j\}$ を選べば $x_{l_j} \to x$, $y_{l_j} \to y$ $(j \to \infty)$ となる。$\mathcal{M}$ は閉集合だから $(x,y) \in \mathcal{M}$ である。また $|y_{l_j} - y_0| \geq \delta$ かつ $|x_{l_j} - x_0| \leq 1/l_j$ より $j \to \infty$ として $|y - y_0| \geq \delta$ かつ $x = x_0$ となる。しかし $(x,y) \in \mathcal{M}$ と $x = x_0$ に注意すれば 2) より $x, x_0 \in \partial D$ かつ $y = x + d_0\nu_x = x_0 + d_0\nu_{x_0} = y_0$ だから $|y - y_0| \geq \delta$ に反する。故に 3) が示された。

3)' も同様に示すことが出来る。もし 3)' が成り立たないとすると 3) の証明と同様にして定数 $\delta > 0$ と $(x,y) \in \mathcal{M}$ が存在して $y = y_0$, $|x - x_0| \geq \delta$ となる。すると 1), 2) より $x, x_0 \in \partial D$ かつ $x = y - d_0\nu_x = y - d_0\nu_y = y_0 - d_0\nu_{y_0} = x_0$ となり $|x - x_0| \geq \delta$ に反する。以上より 3)' も示された。 ■

Lemma 5.1 において $\varepsilon_1 = 1/2$ と選んだときの $\delta_1 > 0$ に対して $\mathcal{W}_{\delta_1}$ を考える。必要ならば $\delta_1 > 0$ を Remark 5.2 の (2) における $\delta > 0$ に対して $\delta > \delta_1 > 0$ となるように充分小さく選んでおく。

Lemma 5.4 定数$\delta_1 > 0$とRemark 5.2の(2)における$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$に対して、$\delta_1 > \eta_1 > 0$となる定数$\eta_1 > 0$が存在して$U = D \cap B_{\eta_1}(x_0)$, $V = \partial\Omega \cap B_{\delta_1}(y_0)$とおくと$\mathcal{M} \cap (\overline{U} \times (\partial\Omega \setminus V)) = \emptyset$かつ$U \times V \times V \subset \mathcal{W}_{\delta_1}$となる。

証明：定数$\delta_1 > 0$に対してLemma 5.3の3)より$\delta_1 > \eta_1 > 0$となる定数$\eta_1 > 0$が存在して$(x, y) \in \partial D \times \partial\Omega$が$|y - y_0| \geq \delta_1$かつ$|x - x_0| \leq \eta_1$を満たせば$(x, y) \notin \mathcal{M}$である。よって$U = \{x \in D \mid |x - x_0| < \eta_1\} = D \cap B_{\eta_1}(x_0)$, $V = \{y \in \partial\Omega \mid |y - y_0| < \delta_1\} = \partial\Omega \cap B_{\delta_1}(y_0)$とおくと$\mathcal{M} \cap (\overline{U} \times (\partial\Omega \setminus V)) = \emptyset$となる。さらに$(x, y, y') \in U \times V \times V$のとき$|x - x_0| < \eta_1 < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$, $|y' - y_0| < \delta_1$だから$(x, y, y') \in \mathcal{W}_{\delta_1}$である。よって$U \times V \times V \subset \mathcal{W}_{\delta_1}$となる。 ■

Lemma 5.4のUに対して、

$$J(\lambda) \geq \lambda^{2l_2} \int_U |\nabla_x v(x; \lambda)|^2 dx = \int_{\partial\Omega} dS_y \int_{\partial\Omega} dS_{y'} \int_U dx e^{-\lambda|x-y|} e^{-\lambda|x-y'|} \Phi(x, y, y'; \lambda)$$

と評価する。次にLemma 5.1とLemma 5.4とRemark 5.2の(2)より

$$\Phi(x, y, y'; \lambda) \geq C\lambda^2 \qquad ((x, y, y') \in U \times V \times V, \lambda \geq \mu_0)$$

となることが分かる。上の積分領域を$V \times V \times U$と$\partial\Omega \times \partial\Omega \times U \setminus V \times V \times U$に分ける。Lemma 5.4より$\mathcal{M} \cap (\overline{U} \times (\partial\Omega \setminus V)) = \emptyset$すなわち$(x, y) \in \overline{U} \times (\partial\Omega \setminus V)$のとき$|x - y| > d_0$となる。$\overline{U} \times (\partial\Omega \setminus V) \subset \overline{D} \times \partial\Omega$はコンパクトだから$(x, y) \mapsto |x - y| - d_0$の連続性より定数$\varepsilon_2 > 0$が存在して$|x - y| \geq d_0 + \varepsilon_2$ $(x \in \overline{U},\ y \in \partial\Omega \setminus V)$となる。よって次を得る。

$$e^{-\lambda(|x-y|+|x-y'|)} \leq e^{-2\lambda d_0 - \varepsilon_2\lambda} \quad (x \in U, (y, y') \in \partial\Omega \times \partial\Omega \setminus V \times V, \lambda > 0).$$

以上より定数$C_1 > 0$が存在して

$$J(\lambda) \geq 2C_1\lambda^2 e^{-2\lambda d_0} \int_{\overline{D} \cap B_{\eta_1}(x_0)} e^{-\lambda|x-x_0|} dx \Big(\int_{\partial\Omega \cap B_{\delta_1}(y_0)} e^{-\lambda|y-y_0|} dS_y \Big)^2 - C'\lambda^2 e^{-\lambda(2d_0+\delta_2)}$$

となる。後はTheorem 3.2の証明と同じである。

6 一回観測に対する囲い込み法

第2節で一回観測に対する指示関数(2.17)を導入した。ここではより単純に$\psi_\lambda(t, x)$, $v(x; \lambda)$を単に

$$\psi_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} v(x; \lambda) \qquad v(x; \lambda) = E_\lambda(x, p) \qquad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \tag{6.1}$$

と選べばどうなるかについて考えよう。このように指示関数を定めた場合の考察は、1次元の対応物は[13]により与えられた。

一次元の場合、すなわち(1.1)において$\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$, $D = (a, b)$ $(0 < a < b < L)$とすると、$\Omega \setminus \overline{D} = (0, a) \cup (b, L)$となる。これは連結でないので、一つの連結成分、例えば$(0, a)$のみを考える。このとき$x = 0$が既知の境界、$x = a$が未知の

境界、$(u(t,0), \partial_x u(t,0))$ $(0 < t < T)$ が観測データである。(6.1) における $E_\lambda(\cdot, p)$ は $(\triangle - \lambda^2)E_\lambda(\cdot, p) = -2\delta(\cdot - p)$ を満たしている。この意味で一次元の場合に対応するものは

$$E_{\lambda,1}(x,p) = \lambda^{-1}e^{-\tau|x-p|} \qquad (\text{但し } p<0)$$

である。この $E_{\lambda,1}(x,p)$ に対して $\psi_\lambda(t,x) = e^{-\tau^2 t}E_{\lambda,1}(x,p)$ とおき、指示関数 $I^{(1)}(\lambda,p)$ を (1.3) により定めれば次が成り立つ。

Theorem 6.1 (Ikehata[13]) $p<0$ とする。定数 $\beta_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\liminf_{\lambda\longrightarrow\infty} \lambda^{\beta_0}\left|\int_0^T u_x(t,0)e^{-\tau^2 t}dt\right| > 0 \tag{6.2}$$

が成り立つとすると $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1}\log|I^{(1)}(\lambda,p)| = -(|p|+2a)$ となる。

定理 6.1 において現れた量 $|p|+2a$ は点 $x=0$ ($\partial\Omega$ に対応) から出発し $x=a$ (∂D に対応) で跳ね返り点 p に戻る折れ線の長さである。一方、この場合の $\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)$ は $\mathrm{dist}(D,\partial\Omega)=a$ である。このことから (2.17) により定めた指示関数から分かる D の情報と $I^{(1)}(\lambda,p)$ から分かる D の情報とは異なっていることに注意しよう。

以下、3 次元空間における (1.1) に対する指示関数を (6.1) で定めた ψ_λ を用いて (1.3) により定める。この指示関数を $I(\lambda,p)$ と表す。一回観測で得られた観測データの組 (u_f, f) に対して (4.1) により定義された $w_f(x;\lambda)$ を用いて $I(\lambda,p)$ は次のように表される。

$$I(\lambda,p) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu E_\lambda(y,p)w_f(y;\lambda) - E_\lambda(y,p)\partial_\nu w_f(y;\lambda))\,dS_y. \tag{6.3}$$

$p \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ を一つ選び固定する。関数 $l_p(x,y)$, l_{min} を

$$l_{min} = \inf_{(x,y)\in\partial D\times\partial\Omega} l_p(x,y) \qquad \text{但し} \qquad l_p(x,y) = |p-x|+|x-y|$$

で定める。指示関数 (6.3) の $\lambda \to \infty$ の挙動は、池畠ー川下 [18] で考察され、

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \frac{1}{\lambda}\log|I(\lambda,p)| = -l_{min} \tag{6.4}$$

となることが領域 D に対するある仮定の下で示された。(6.4) を得るために必要となる領域 D に対する仮定をすべて述べるのには少し準備が必要である。ここでは次のように荒く述べておくにとどめる。仮定の詳細は次節で述べる。

仮定 1．D は狭い意味で凸である（すなわち ∂D の各点における Gauss 曲率が 0 ではない)。

仮定 2．点 p と $\partial\Omega$, ∂D の位置関係に関する仮定が必要になる。

仮定 3．観測データ $\partial_\nu u(t,x)$ に対する仮定が必要になる。

指示関数の極限 (6.4) で l_{min} が出てくることについての解釈は 1 次元の場合と比較すると分かりやすい。l_{min} は $y\in\partial\Omega$ から出発し、$x\in\partial D$ で跳ね返り点 p に戻る折れ線の長さ $l_p(x,y)$ のうち最短なものである。これは Theorem 6.1 にあるように一次元のときに現れた数 $|p|+2a$ に対応している。(6.4) における l_{min} はこの状況が反映されてい

るものと考えられる (一次元のときの結果についての解釈についての詳しい情報については [12] 参照)。しかし、3 次元の場合は l_{min} を与える点 $(x_0, y_0) \in \partial D \times \partial\Omega$ の位置については複雑になる。

$l_p(x_0, y_0) = l_{min}$ となる点 $(x_0, y_0) \in \partial D \times \partial\Omega$ の全体を $\mathcal{M}(p)$ で表す。また次の集合を導入する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(p) \quad &= \{\, (x, y) \in \mathcal{M}(p) \,|\, x \in \mathcal{G}^+(p), \nu_x \cdot (y - x) > 0 \,\},\\
\mathcal{M}_2^{\pm}(p) \quad &= \{\, (x, y) \in \mathcal{M}(p) \,|\, x \in \mathcal{G}^{\pm}(p), \pm\nu_x \cdot (y - x) < 0 \,\},\\
\mathcal{M}_g(p) \quad &= \{\, (x, y) \in \mathcal{M}(p) \,|\, x \in \mathcal{G}(p) \,\}.
\end{aligned}$$

但し、$\mathcal{G}(p)$, $\mathcal{G}^{\pm}(p)$ は次で定義される集合である。

$$\mathcal{G}(p) = \{\, x \in \partial D \,|\, \nu_x \cdot (p - x) = 0 \,\}, \qquad \mathcal{G}^{\pm}(p) = \{\, x \in \partial D \,|\, \pm\, \nu_x \cdot (p - x) > 0 \,\}.$$

Proposition 6.2 次が成り立つ。

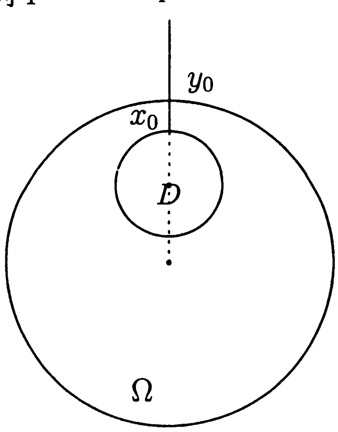
1) $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}_1(p) \cup \mathcal{M}_2^+(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p) \cup \mathcal{M}_g(p)$ が成り立つ。

2) $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_2^+(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p) \cup \mathcal{M}_g(p)$ ならば x_0 は線分 py_0 上にある。

3) D が狭い意味で凸のとき、任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_2^{\pm}(p)$ に対して $x_0^* \in \mathcal{G}^{\mp}(p)$ で $(x_0^*, y_0) \in \mathcal{M}_2^{\mp}(p)$ となるものがただ一つだけ存在する (複合同順)。

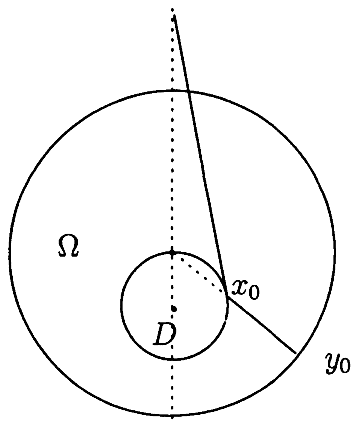
$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p)$ で 1 次元の場合に対応するのは $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ でありさらに y_0 が線分 px_0 上にある場合のみである。下図の例 1 がこの場合に当たる。一般にはそれ以外の場合が起こる。下図の例 2 は $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ であるが一次元の場合とは異なる状況になっているものである。さらに $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p) \setminus \mathcal{M}_1(p)$ となる場合もある。例えば下図の例 3 のような状況がこれに当たる。このように、一次元のときに較べ、l_{min} を与える点 (x_0, y_0) の構造は複雑であり、この複雑さが (6.4) を得る際にも大きな影響を与えている。

例 1



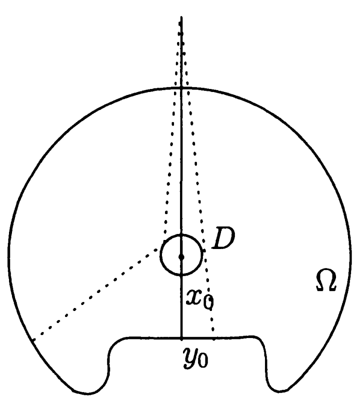
一次元に対応する場合

例 2



$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ だが
一次元とは異なる場合

例 3



$\mathcal{M}_2^{\pm}(p)$ の元しかない

7 指示関数の漸近挙動

この節ではどのような仮定の下で (6.4) が成り立つかを述べる。(4.2) の解 $p_f(x;\lambda)$ に対して

$$I_0(\lambda,p)=\int_{\partial D}\partial_\nu E_\lambda(x,p)p_f(x;\lambda)dS_x \tag{7.1}$$

とおく。(4.6) により $I(\lambda,p)$ はある定数 $C>0$ に対して

$$\left|I(\lambda,p)-I_0(\lambda,p)\right|\le Ce^{-\lambda^2T/2}\quad(\lambda>>1) \tag{7.2}$$

を満たす。(7.2) に注意すれば (7.1) で定義された $I_0(\lambda,p)$ の漸近挙動を調べればよいことが分かる。$I_0(\lambda,p)$ の漸近挙動については $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ に対しても成り立つ。以下、$I_0(\lambda,p)$ について考えるときは $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ とする。$\delta_0>0$ に対して $\mathbb{C}_{\delta_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda\ge\delta_0|\mathrm{Im}\,\lambda|\}$ とおく。

Theorem 7.1 ∂D は狭い意味で凸とし、$\mathcal{M}_g(p)=\emptyset$ かつ任意の $(x_0,y_0)\in\mathcal{M}(p)\setminus\mathcal{M}_g(p)$ で $l_p(x,y)$ は非退化であるとする。このとき $\mathcal{M}(p)$ は有限集合である。さらに各 $(x_0,y_0)\in\mathcal{M}_1(p)\cup\mathcal{M}_2^-(p)$ に対する正定数 $C(x_0,y_0)>0$ が存在して次が成り立つ。

$$I_0(\lambda,p)=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda l_{min}}\left\{A(\lambda,p)g+\|g(\,\cdot\,,\lambda)\|_{C^{0,\alpha_0}(\partial\Omega)}O(\lambda^{-\alpha_0/2})\right\}\qquad(\lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},|\lambda|\to\infty),$$
$$A(\lambda,p)g=\sum_{(x_0,y_0)\in\mathcal{M}_1(p)}C(x_0,y_0)g(y_0,\lambda)-\sum_{(x_0,y_0)\in\mathcal{M}_2^-(p)}C(x_0,y_0)g(y_0,\lambda).$$

Theorem 7.1 と (7.2) より次を得る。

Corollary 7.2 *Theorem 7.1* における仮定に加え、定数 $\beta_0\in\mathbb{R}$ が存在して $g(x,\tau)$ が

$$\liminf_{\lambda\longrightarrow\infty}\lambda^{\beta_0}|A(\lambda,p)g|>0,\qquad\lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\lambda^{\beta_0-\alpha_0/2}\|g(\,\cdot\,,\lambda)\|_{C^{0,\alpha_0}(\partial\Omega)}=0 \tag{7.3}$$

を満たすとすると *(6.4)* が成り立つ。但し、$A(\lambda,p)g$ は *Theorem 7.1* におけるものである。

Corollary 7.2 の仮定 (7.3) が第 6 節で述べた「仮定 3」である。これは 1 次元の場合の仮定 (6.2) に対応している。一回の観測から得られるデータを用いて指示関数の漸近挙動を調べることにより l_{min} を得るためには (7.3) や (6.2) を満たすように与える熱流を制御すればよいということが Theorem 6.1 や Corollary 7.2 から分かる。

第 6 節で述べた「仮定 2」は Theorem 7.1 における仮定「$\mathcal{M}_g(p)=\emptyset$ かつ任意の $(x_0,y_0)\in\mathcal{M}(p)\setminus\mathcal{M}_g(p)$ で $l_p(x,y)$ は非退化であるとする。」のことを指す。この仮定を満たす十分条件としては次のものがある。

Proposition 7.3 $(x_0,y_0)\in\mathcal{M}(p)\setminus\mathcal{M}_g(p)$ に対して $y_0\in\partial\Omega$ における $\partial\Omega$ の主曲率の最大値が l_{min}^{-1} より小さければ $l_p(x,y)$ は (x_0,y_0) で非退化である。

Proposition 7.3 の仮定を落とすと $l_p(x,y)$ の非退化性は一般には成り立たない。第6節で挙げた例2で Ω は原点 O 中心、半径 $R>0$ の球とすると $R<l_{min}$ となっている。$\partial\Omega$ の主曲率はどこでも R^{-1} だから Proposition 7.3 の仮定を満たさない。この場合、直線 Op に関する回転対称性より l_{min} を与える点はすべて退化していることが分かる。

次に、$\mathcal{M}(p)=\mathcal{M}_1(p)$ となるための十分条件を1つ与えよう。$\mathcal{L}(p)=\{y\in\partial\Omega\,|\,(y-p)/|y-p|\cdot\nu_y=1\}$ とおく。関数 $\partial\Omega\ni y\mapsto|y-p|\in\mathbb{R}$ の最大値を与える点 y_0 は $y_0\in\mathcal{L}(p)$ となる。この事実を用いると次を示すことができる。

Proposition 7.4 集合 $\mathcal{L}(p)$ が一点のみからなる集合とする。このとき次が成り立つ。

$$\mathcal{M}_2^+(p)\cup\mathcal{M}_2^-(p)\cup\mathcal{M}_g(p)=\emptyset.$$

第6節で述べた例1を考える。Ω は中心が原点 O で半径が R, D は中心が q で半径 r の開球 $(|q|+r<R)$ とし、D の中心は線分 Op 上にあるとする。このとき Proposition 7.4 より $\mathcal{M}(p)=\mathcal{M}_1(p)$ となるが、より詳しく $\mathcal{M}_1(p)=\{(q+r\omega,R\omega)\}$ (但し $\omega=|p|^{-1}p$) が分かる。よって $l_{min}=h+2(R-r-|q|)$ (但し $h=\mathrm{dist}(p,\partial\Omega)$) となる。Proposition 7.3 と Corollary 7.2 より $l_{min}<R$ のとき、すなわち $h<2(r+|q|)-R$ のとき (7.3) を満たせば指示関数から l_{min} の値が分かることになる。故に D がある程度大きければ p を $\partial\Omega$ の近くに選ぶことにより $\sup_{x\in D}\omega\cdot x=R+2^{-1}(h-l_{min})$、すなわち $D\subset\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,\omega\cdot x\le R+2^{-1}(h-l_{min})\}$ が分かる。

Proposition 7.3 で与えた十分条件は $(x_0,y_0)\in\mathcal{M}_1(p)$ のときはもう少し弱めることができ、D の大きさに関する制約は緩められることが分かる。また、一般の場合に l_{min} から D の大きさ（例えば凸包）を推定するのは今後の課題である。さらに今回は (6.1) のように $v(x;\lambda)=E_\lambda(x,p)$ を用いて定めた指示関数 $I(\lambda,p)$ に関して議論したが、$v(x;\lambda)$ の選び方を変えたらどうなるかという問題もある。これについては [12] においてこれまでの囲い込み法に関する研究をふまえた問題提起がなされている。Theorem 7.1 および Corollary 7.2 はこの中の一つに答えたものである。

8 定理 7.1 の証明方針

この節では [18] で与えられた Theorem 7.1 の証明の方針について述べる。Theorem 3.2 と同様、(4.2) の解 $p_f(x;\lambda)$ の一重層ポテンシャル

$$V_\Omega(\lambda)g(x)=\int_{\partial\Omega}E_\lambda(x,y)\varphi(x,\lambda)dS_y,\qquad V_D(\lambda)h(x)=\int_{\partial D}E_\lambda(x,z)\psi(z,\lambda)dS_z,$$

による表現 $p_f(x;\lambda)=V_\Omega(\lambda)\varphi(x,\lambda)+V_D(\lambda)\psi(x,\lambda)$ を用いる。$\varphi(\cdot,\lambda)$, $\psi(\cdot,\lambda)$ が満たす積分方程式は $\mathrm{Re}\,\lambda$ が十分大きいとき Neumann 級数により解くことができ、$\varphi(\cdot,\lambda)\in C^{0,\alpha_0}(\partial\Omega)$, $\psi(\cdot,\lambda)\in C^{0,\alpha_0}(\partial D)$ の存在は分かる。この解の表示を (7.1) に代入し整理すれば $I_0(\lambda,p)=\lambda I_{00}(\lambda,p)+I_{01}(\lambda,p)$, の形になる。但し、

$$I_{0j}(\lambda,p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{\partial\Omega}dS_y\varphi(y,\lambda)\int_{\partial D}e^{-\lambda l_p(x,y)}G_j(x,y,p,\lambda)dS_x,\ j=0,1 \qquad (8.1)$$

である。ここで $G_j(x,y,p,\lambda)$ $(j=0,1)$ は $\partial\Omega$ 上のある積分作用素 $M_j(\lambda)$ により

$$F_j(x,p,\lambda)=e^{\lambda|x-p|}\left(M_j(\lambda)\left(\frac{e^{-\lambda|\cdot-p|}}{|\cdot-p|}\right)\right)(x),\ j=0,1$$

で与えられる関数 $F_j(x,p,\lambda)$ に対して $F_0(x,p,\lambda)+F_1(x,p,\lambda)$ の連続関数係数の一次式の形になっている。

定理 7.1 は (8.1) に Laplace 法を用いて示す。そのためには振幅関数 $G_j(x,y,p,\lambda)$ の $|\lambda|\to\infty$ のときの評価が必要になる。すなわち $F_j(x,p,\lambda)$ について次を示すことが重要になる。$\delta>0$ に対して $\mathcal{G}_\delta(p)=\{x\in\partial D\,|\,\mathrm{dist}(x,\mathcal{G}(p))\geq\delta\}$, $\mathcal{G}_\delta^{\pm}(p)=\mathcal{G}_\delta(p)\cap\mathcal{G}^{\pm}(p)$. とおく。

Lemma 8.1 定数 $\mu_0>0$、$C>0$ および $\delta>0$ に依存する定数 $C_\delta>0$ が存在して次が成り立つ。

(1) $|F_j(x,p,\lambda)|\leq C Re\lambda$ $(x\in\partial D,\ \lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},\ Re\lambda\geq\mu_0,\ j=0,1)$.

(2) $|F_j(x,p,\lambda)|\leq C_\delta(Re\lambda)^{-1}$ $(x\in\mathcal{G}_\delta^{+}(p),\ \lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},\ Re\lambda\geq\mu_0,j=0,1)$.

(3) $|F_1(x,p,\lambda)|\leq C_\delta(Re\lambda)^{-1}$ $(x\in\mathcal{G}_\delta^{-}(p),\ \lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},\ Re\lambda\geq\mu_0)$.

(4) $\left|F_0(x,p,\lambda)+\dfrac{1}{|x-p|}\right|\leq C_\delta(Re\lambda)^{-\alpha_0/2}$ $(x\in\mathcal{G}_\delta^{-}(p),\ \lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},\ Re\lambda\geq\mu_0)$.

$M_j(\lambda)$ の積分核を $M_j(x,y,\lambda)$ で表す。

$$M_0(x,y;\lambda)=\frac{\lambda}{2\pi}e^{-\lambda|x-y|}\frac{\nu_y\cdot(x-y)}{|x-y|^2}$$

である。作用素 $M_1(\lambda)$ は $M_1(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)+({}^tY_{22}(\lambda))^2(I-{}^tY_{22}(\lambda))^{-1}$ という形をしている。ここで $\tilde{M}(\lambda)$ と $Y_{22}(\lambda)$ は

$$|K_\lambda(x,y)|\leq C_0\mu e^{-\mu|x-y|}\ (x,y\in\partial D,\ x\neq y,\ \mu=\mathrm{Re}\,\lambda>0) \tag{8.2}$$

$$|\tilde{K}_\lambda(x,y)|\leq\frac{C_3e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|}\ (x,y\in\partial D,\ x\neq y,\ \mu=\mathrm{Re}\,\lambda>0)$$

と評価される可測関数 $K_\lambda(x,y)$ と $\tilde{K}_\lambda(x,y)$ の和からなる関数を積分核として持つ積分作用素である。よって Lemma 8.1 を得るためには $(I-{}^tY_{22}(\lambda))^{-1}-I={}^tY_{22}(\lambda)(I-{}^tY_{22}(\lambda))^{-1}$ の積分核の評価が必要になる。この評価を得るためには、(8.2) の評価をもつ $\partial D\times\partial D$ 上の可測関数 $K_\lambda(x,y)$ を積分核に持つ ∂D 上の積分作用素

$$K_\lambda h(x)=\int_{\partial D}K_\lambda(x,y)h(y)dS_y \qquad (h\in C(\partial D))$$

に対する次の定理が必要である。

Theorem 8.2 定数 $\mu_0>0$ が存在して $\mathrm{Re}\lambda\geq\mu_0$ のとき作用素 $K_\lambda(I-K_\lambda)^{-1}$ は ∂D 上の積分作用素である。さらに、任意の $\delta_0>0$ に対して

$$|K_\lambda^\infty(x,y)|\leq C_{\delta_0}\mu e^{-\mu|x-y|}\qquad(x,y\in\partial D,\ \lambda\in\mathbb{C}_{\delta_0},\mu=\mathrm{Re}\,\lambda\geq\mu_0)$$

となる定数 $C_{\delta_0}>0$ が存在する。但し、$K_\lambda^\infty(x,y)$ は作用素 $K_\lambda(I-K_\lambda)^{-1}$ の積分核である。

Theorem 8.2 を用いれば $M_1(x,y;\lambda)$ についても次の評価を得ることが分かる。

$$|M_1(x,y;\lambda)| \leq C\left(\mu + \frac{1}{|x-y|}\right)e^{-\mu|x-y|} \qquad (x,y \in \partial D,\ \lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}, \mu = \mathrm{Re}\,\lambda \geq \mu_0)$$

これらの積分核の評価は池畠一川下 [19] で与えられた。証明の詳細は [19] に譲る。

上の積分核の評価で指数関数の形 $e^{-\mu|x-y|}$ が $M_0(x,y;\lambda)$ や (8.2) に現れている形と同じになっていることが重要である。これらの評価を用いて Lemma 8.1 を示すことができる ([18] 参照)。

References

[1] K. Bryan and L. F. Caudill, Jr., Uniqueness for a boundary identification problem in thermal imaging, In: Differential Equations and Computational Simulations III J. Graef, R. Shivaji, B. Soni J. and Zhu (Editors), Electronic Journal of Differential Equations, Conference 01(1997), pp. 23-39, URL:http://www.ma.hw.ac.uk/EJDE/index.html

[2] B. Canuto, E. Rosset and S. Vessella, Quantitative estimate of unique continuation for parabolic equations and inverse initial-boundary value problems with unknown boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., **354**(2002), 491-535.

[3] Daido, Y., Kang, H. and Nakamura, G., A probe method for the inverse boundary value problem of non-stationary heat equations, Inverse Problems, **23**(2007), 1787-1800.

[4] Daido, Y., Lei, Y., Liu, J.J. and Nakamura, G., Numerical implemantations of dynamical probe method for non-stationary heat equation, Applied Mathematics and Computation, **211**(2009), 510-521.

[5] Dautray, R. and Lions, J-L., Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology, Evolution problems I, Vol. **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] Elayyan, A. and Isakov, V., On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation, SIAM J. Math. Anal., **28**(1997), 49-59.

[7] Ikehata, M., Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements, Comm. PDE., **23**(1998), 1459-1474.

[8] Ikehata, M., Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, Inverse Problems, **15** (1999), 1231-1241.

[9] Ikehata, M., Reconstruction of the support functions for inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Problems, **8** (2000), 367-378.

[10] Ikehata, M., On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement, Inverse Problems, **16**(2000), 785-793.

[11] Ikehata, M., The Herglotz wave functions, the Vekua transform and the enclosure method, Hiroshima Math. J., **35** (2005), 485-506.

[12] Ikehata, M., Virtual signal in the heat equation and the enclosure method, Inverse Problems in Applied Sciences-towards breakthrough, Journal of Physics:Conference Series, **73**(2007), 012010.

[13] Ikehata, M., Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, Applicable Analysis, **86** (2007), 963-1005.

[14] 池畠優, 逆問題における不連続性の抽出のための解析的方法-探針法 10 年-, 論説, 数学, **62**(2010), No, 3, 289-314.

[15] Ikehata, M., The framework of the enclosure method with dynamical data and its applications, Inverse Problems, **27**(2011) 065005(16pp).

[16] Ikehata, M. and Kawashita, M., The enclosure method for the heat equations, Inverse problem **25** (2009) 075005.

[17] Ikehata, M. and Kawashita, M., On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval. Inverse Problems **26** (2010), no. 9, 095004.

[18] Ikehata, M. and Kawashita, M., An inverse problem for a three-dimensional heat equation in thermal imaging and the enclosure method, preprint.

[19] Ikehata, M. and Kawashita, M., Estimates of the integral kernels arising inverse problems for a three-dimensional heat equation in thermal imaging, preprint.

[20] 池畠優, 中村玄, 境界値逆問題 $\cdots$ Calderón からの 15 年, 数学, **48** (1996), 259-281.

[21] Isakov, V., Inverse obstacle problems, Topical review, Inverse Problems, **25**(2009) 123002(18pp).

[22] 磯崎洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, 数学, **50** (1998), 163-180.

[23] 磯崎洋, 散乱理論と逆問題, 数学, **59** (2007), 113-130.

[24] Mizohata, S., Theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1973.

[25] 中村玄, 弾性体の逆問題, 数学, **53** (2001), 113-124.

[26] Norris, J. R., Heat kernel asymptotics and the distance function in Lipschitz Riemannian manifolds, Acta Math., **179**(1997), 79-103.

[27] Uhlmann, G., Electrical impedance tomography and Calderón's problem, Topical review, Inverse Problems, **25**(2009)123011(39pp).

[28] Varadhan, S. R. S., On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Commun. Pure. Appl. Math., **20**(1967), 431-455.

[29] Vessella, S., Stability estimates in an inverse problem for a three-dimensional heat equation, SIAM J. Math. Anal., **28**(1997), 1354-1370.

[30] Vessella, S., Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates, Inverse Problems 24 (2008) 023001